Московский Государственный Университет
Физический факультет
Кафедра физики частиц и космологии

Движение квантовой частицы в потенциале $1/x^2$

Курсовая работа
студента 216 группы
Мингалеева Артура Эдуардовича

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Белокуров Владимир Викторович

Москва, 2023

Содержание

1 Введение

В данной работе рассматривается одномерное уравнение Шредингера для потенциального поля g^2/x^2, где x-координата. Предпринимается попытка построения когерентного состояния и нахождения среднего модуля квадрата координаты для такого состояния. Данное уравнение имеет отношение к термодинамике черной дыры, как было показано в статье [1].

1.1 Связь черной дыры с потенциалом g^2/x^2

В статье [1] показывается как данное уравнение может быть связанно с температурой черной дыры.

Оказывается, что проблема скалярного поля вблизи пространства-времени черной дыры может быть сведена к проблеме квантово -механической частицы с потенциалом обратного квадрата.В этом случае $\frac{d|x|^2}{dt}$ можно рассматривать как скорость образования частиц горизонтом, и математический результат, полученный выше, приобретает физический смысл.

Рассмотрим скалярное поле в пространствевремени $1+1$ с метрикой

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B^{-1}(r)dr^2 \tag{1}$$

где $B(r)$ имеет простой ноль при $r = r_0$ с $B'(r) = dB/dr$, являющийся конечным и отличным от нуля при r_0. (Мы будем работать с системой измерений (1+1), поскольку она отражает всю необходимую физику.) Исчезновение $B(r)$ в точке $r = r0$ указывает на наличие горизонта. Вблизи горизонта мы можем расширить $B(r)$ следующим образом

$$B(r) = B^{'}(r_0)(r - r_0) + O[(r - r_0)^2] \approx B^{'}(r_0)(r - r_0) \tag{2}$$

В случае радиуса Шварцильда,$B^{'}(r) = r_0^{-1}$ с $r_0 = 2M$ как радиусом Шварцильда. Для скалярного поля $\Phi(x, t)$ уравнение поля выглядит так:

$$(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{h^2})\Phi = 0 \tag{3}$$

С учетом (1) уравнение приобретает вид:

$$c^2 B(r)^{-1} \partial_t^2 \Phi - \partial_r (B(r) \partial_r \Phi) = m_0^2 c^2 h^2 \Phi \tag{4}$$

Будем искать Φ в следующем виде:

$$\Phi(r, t) = e^{-i\omega t} \frac{\psi(r)}{\sqrt{B(r)}} \tag{5}$$

Тем самым приходим к уравнению:

$$-\frac{h^2}{2} \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{\alpha}{(r - r_0)^2} \psi(r) = 0 \tag{6}$$

Где $\alpha = \frac{h^2 \omega^2}{2c^2 [B^{'}(r_0)]^2}$ вблизи горизонта. Положим $x = r - r_0$ и $\beta = \alpha/m$.Тогда уравнение (6) становиться уравнением Шредингера для частицы с потенциалом $\frac{-\beta}{x^2}$

$$-\frac{h^2}{2} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{\beta}{x^2} \psi(x) = \epsilon \psi \tag{7}$$

При этом в конце вычисление ϵ устремляется к нулю.

Таким образом уравнение скалярного поля в зоне Шварцильда эквивалентно уравнению Шредингера для квантовой частицы в обратном квадратичном потенциале вблизи начала координат.

После этого, для потенциала $V(x) = -\frac{h^2}{2m}(a^2 + \frac{1}{4})\frac{1}{x^2}$ были поведены расчеты, использующие интеграл Фейнмана по траекториям, которые дали следующее выражение

$$\frac{d|x(t)^2|}{dt} = \frac{4h}{ma}(a^2 + \frac{1}{4})(N + \frac{1}{2}) \tag{8}$$

Где

$$N = \frac{1}{e^{2\pi a} - 1} \tag{9}$$

Эта величина сходна с формулой Планка, что и позволяет найти температуру черной дыры.

1.2 Когерентное состояние

Рассмотрим построение когерентного состояния для квантового гармонического осциллятора. Введем $a = \frac{Q+iP}{\sqrt{2h}}, a^+ = \frac{Q-iP}{\sqrt{2h}}, N = a^+a$, где Q, P-координата и импульс соответственно. Рассмотрим состояние, определяемое по формуле:

$$|\alpha\rangle = e^{\frac{-|\alpha|^2}{2}} \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}} |n\rangle \tag{10}$$

где $|n\rangle$-собственные состояния гармонического осциллятора,α-произвольное комплексное число. Согласно [3], данное состояние является собственным состоянием оператора a:

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$$

В [3] показывается, что в этом случае это состояние реализует минимум соотношения неопределённости

$$\Delta P \Delta Q = h$$

Также в [3] показывают, что эволюция во времени $|\alpha\rangle$ происходит таким образом, что это состояние остается собственным вектором оператора a. Это говорит о том, что состояние (10) минимизирует соотношение неопределённости во все моменты времени. Поэтому данное состояние называют когерентным. В [1] построена методика нахождения когерентное состояния для других систем. Такие состояния наиболее близки к классическим, и поэтому представляют большой интерес.

1.3 Цели

Задачей данной работы является попытка прийти к выражению, схожему с (8), в котором будет фигурировать величина N, но другим методом. В работе [2] описан метод получения когерентного состояния для схожего потенциала, но имеющего квадратичный член. Получив когерентное состояние, можно вычислить среднее значение модуля квадрата координаты и сравнить его с (8). Предпринимается попытка применения данного метода к потенциалу нашей задачи.

2 Идея нахождения когерентного состояния и его использования

В [2] для потенциала $g^2/x^2 + x^2/2$ были получены следующие коммутационные соотношения:

$$H_0 = \frac{-d^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{g^2}{x^2}$$

$$B^+ = (a^+)^2 - \frac{g^2}{x^2}$$

$$B = (a)^2 - \frac{g^2}{x^2}$$

$$[H_0; B^+] = 2B^+ \tag{11}$$

$$[H_0; B] = -2B \tag{12}$$

$$[B; B^+] = 4H_0 \tag{13}$$

где a^+,aклассические операторы рождения и уничтожения соответственно для гармонического осциллятора. Благодаря соотношениям (11), (12) строиться спектр собственных функций и энергий. Соотношения (11)-(13) позволяет судить какую алгебру образуют эти операторы, исходя из которой строится когерентное состояние. Попробуем обобщить данные соотношения другие потенциалы. Рассмотрим операторы:

$$H_\gamma = H_0 + \gamma\frac{x^2}{2}$$

$$b^+ = B^+ + \gamma\frac{x^2}{2}$$

$$b = B + \gamma\frac{x^2}{2}$$

где γ-постоянное вещественное число.

Получим

$$[H_\gamma; b^+] = 2B^+ + \gamma x^2 - \gamma(xd + dx) \tag{14}$$

$$[H_\gamma; b] = -2B - \gamma x^2 - \gamma(xd + dx) \tag{15}$$

$$[b; b^+] = 4H_\gamma \tag{16}$$

Где d-оператор дифференцирование по x.

Учтем:

$$B^+ - B = -(xd + dx)$$

Тогда получим что уравнения 14-16 можно преобразовать к виду

$$[H_\gamma; b^+] = (2+\gamma)b^+ - \gamma b \tag{17}$$

$$[H_\gamma; b] = -(2+\gamma)b + \gamma b^+ \tag{18}$$

$$[b; b^+] = 4H_\gamma \tag{19}$$

Мы можем представить коммутирование оператора H_γ с операторами b, b^+ как действие матрицы на вектор с компонентами b, b^+.

$$\begin{pmatrix} (2+\gamma) & -\gamma \\ \gamma & -(2+\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^+ \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\gamma)b^+ - \gamma b \\ \gamma b^+ - (2+\gamma)b \end{pmatrix}$$

Или запишем это так:

$$[H_\gamma; \begin{pmatrix} b^+ \\ b \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} (2+\gamma)b^+ - \gamma b \\ \gamma b^+ - (2+\gamma)b \end{pmatrix}$$

В дальнейшем, это соответствие будет записываться так:

$$[H_\gamma; ...] -> \begin{pmatrix} (2+\gamma) & -\gamma \\ \gamma & -(2+\gamma) \end{pmatrix}$$

Данную матрицу при определенных γ можно диагонализовать.

Замечание: Все соотношения написанные выше верны, если вместо $\frac{g^2}{x^2}$ мы запишем $-\frac{g^2}{x^2}$,что соответствует рассматриваемой задаче.В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $-\frac{g^2}{x^2}$.

Нашей задаче соответствует γ=-1. В этом случае:

$$[H_{-1}; ...] -> \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Оба собственных значения матрицы равны нулю, и матрица к сожалению не диагонализуетса, а имеет вид жордановой клетки. Получается:

$$[H_{-1}; ...] -> H^{'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Или по другому:

$$[H_\gamma; b^+ - b] = 2(b^+ + b)$$

$$[H_\gamma; b^+ + b] = 0$$

($H^{'}$матрица соответствующая H_{-1} в базисе, в котором Гамильтониан имеет вид жордановой клетки).

Но мы можем рассмотреть достаточно близкие к -1 справа значения γ, и для соответствующих H_γ построить когерентные состояния $|\zeta, \gamma\rangle$, и используя их получить $< |x|^2 > (\gamma) = \langle\zeta, \gamma| \, |x^2| \, |\zeta, \gamma\rangle$, а потом устремить γ к -1. Решая характеристическое уравнения для данной матрицы, получаем, что собственные значения данного оператора равны

$$\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{1+\gamma} \tag{20}$$

Матрица перехода будет иметь вид:

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} & 1 \\ 1 & \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} \end{pmatrix}$$

Ее обратная матрица равна:

$$C^{-1} = \frac{1}{det|C|} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} & -1 \\ -1 & \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$det|C| = (\frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2)})^2 - 1$$

Прежде всего заметим, что при γ=-1 определитель det|C|=0, но при γ>-1 это не так(для достаточно близких значений).

Поскольку мы эту матрицу собираемся умножать на вектор $\begin{pmatrix} b^+ \\ b \end{pmatrix}$, то определитель будет являться числом, на которое делятся обе компоненты вектора. Это деление не изменит последующие коммутационные соотношения, а также решения дифференциальных уравнений. Поэтому в дальнейшем определитель учитываться не будет.

Теперь мы можем найти матрицы рождения и уничтожения для гамильтониана H_γ, которые будут обозначаться в дальнейшем A^+ и A соответственно.Получаем:

$$\begin{pmatrix} A^+ \\ A \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} b^+ \\ b \end{pmatrix}$$

или:

$$A^+ = \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} b^+ - b \tag{21}$$

$$A = \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2} b - b^+ \tag{22}$$

Заметим, что A^+ и A комплексно сопряжены.Тогда, с учетом (19) и (20), получаем:

$$[H_\gamma; A^+] = 2\sqrt{1+\gamma} A^+ \tag{23}$$

$$[H_\gamma; A] = -2\sqrt{1+\gamma} A \tag{24}$$

$$[A; A^+] = 4((\frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2})^2 - 1) H_\gamma \tag{25}$$

Коэффициент перед гамильтонианом в (15) при -1<γ положителен, тогда согласно работе [2], операторы A^+,A,H_γ являются генераторами алгебры Ли группы $SU(1,1)$.В работе [2] указан метод построения когерентного состояния в таком случае. Он и будет использован в дальнейшем.

Для нахождения собственных функций гамильтониана решим два уравнения

$$A\psi = 0 \tag{26}$$

$$A^{+}\psi = 0 \tag{27}$$

Уравнение (26) соответствует состоянию с наименьшей энергией в спектре собственных функций, чьи энергии положительны.Уравнение (27) соответствует состоянию с наибольшей энергией в спектре собственных функций, чьи энергии отрицательны.

В результате их решения получаем:

для A

$$\psi = C_1 e^{(-(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1-\sqrt{1-8g^2})} + C_2 e^{(-(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1+\sqrt{1-8g^2})} \tag{28}$$

для A^{+}

$$\psi = C_1 e^{(+(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1-\sqrt{1-8g^2})} + C_2 e^{(+(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1+\sqrt{1-8g^2})} \tag{29}$$

Перед дальнейшими выкладками скажем, что будет рассматривать такие значения g, при которых величина $1 - 8g^2$ положительна.

Как видно, состояние (29) ненормируемое, поэтому его рассматривать не имеет смысла. Для уравнения (28) имеем два линейно независимых решения, нормируемые и не имеющие особенностей(т.к. $1 - \sqrt{1-8g^2}$>0). Напишем их отдельно:

$$\psi_{0,1} = C_{0,1} e^{(-(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1-\sqrt{1-8g^2})} \tag{30}$$

$$\psi_{0,2} = C_{0,2} e^{(-(\sqrt{1+\gamma})x^2/2)} x^{1/2(1+\sqrt{1-8g^2})} \tag{31}$$

Действуя на них гамильтонианом, находим их энергии:

$$E_{0,1} = \frac{1}{2}(1 + (1 - \sqrt{1-8g^2}))(\sqrt{1+\gamma}) \tag{32}$$

$$E_{0,2} = \frac{1}{2}(1 + (1 + \sqrt{1-8g^2}))(\sqrt{1+\gamma}) \tag{33}$$

Тогда спектр гамильтониана будет равен

$$E_{n,1} = \frac{1}{2}(1 + 2n + (1 - \sqrt{1-8g^2}))(\sqrt{1+\gamma}) \tag{34}$$

$$E_{n,2} = \frac{1}{2}(1 + 2n + (1 + \sqrt{1-8g^2}))(\sqrt{1+\gamma}) \tag{35}$$

Отметим, что при $\gamma = -1$ данные состояния становятся ненормируемыми.

Вообще говоря, группа $SU(1,1)$ реализуется при таких операторах K^{+}, K^{-}, K_0, которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[K_0, K^+] = K^+ \tag{36}$$

$$[K_0, K^-] = -K^- \tag{37}$$

$$[K^-, K^+] = K_0 \tag{38}$$

перейдём от операторов A^+, A, H_γ к операторам K^+, K^-, K_0, которые будут удовлетворять соотношениям (26)-(28):

$$K^+ = \frac{A^+}{2\sqrt{((\frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2})^2 - 1)\sqrt{1+\gamma}}} \tag{39}$$

$$K^- = \frac{A}{2\sqrt{((\frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2})^2 - 1)\sqrt{1+\gamma}}} \tag{40}$$

$$K_0 = \frac{H_\gamma}{2\sqrt{1+\gamma}} \tag{41}$$

Теперь, на основе этих операторов составим новый оператор:

$$K = K^- - 2\zeta K_0 + \zeta^2 K^+ \tag{42}$$

Где ζ- произвольное комплексное число.

Тогда, согласно [2], для нахождения когерентного состояния надо решить следующие уравнение:

$$K\,|\zeta, \gamma\rangle = 0 \tag{43}$$

Введем некоторые обозначения

$$\theta = (\frac{1}{2\sqrt{((\frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2})^2 - 1)\sqrt{1+\gamma}}})$$

$$\eta = \frac{\gamma}{(\sqrt{\gamma+1}-1)^2}$$

$$\sigma = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\gamma}}$$

$$\alpha = \theta(\eta - 1)(\zeta^2 + 1)$$

$$\beta = \theta(\eta + 1)(\zeta^2 - 1)$$

В координатном представлении уравнение (43) примет вид:

$$((\frac{\alpha+\sigma}{2})d^2 + \beta x d + ((\frac{\alpha-\sigma}{2})(1+\gamma)x^2 + (\alpha-\beta)\frac{g^2}{x^2} + \frac{\beta}{2}))\,|\zeta, \gamma\rangle = 0$$

Напомним, что d-оператор дифференцирования.

К сожалению, данное уравнение не удалось решить. Возможно, для его решения понадобятся численные методы.

3 Вывод

В данной работе был рассмотрен гамильтониан квантовой частицы в потенциале вида $V = \frac{x^2(1+\gamma)}{2} - \frac{g^2}{x^2}$, при $\gamma > -1$. Было показано, что при таких значениях γ реализуется группа $SU(1,1)$. Построены операторы рождения и уничтожения. Определены состояния, соответствующие наименьшим энергиям. Найдено уравнение, решение которого дает когерентное состояние для рассматриваемого потенциала. Были показаны трудности, возникающие при попытке построения операторов рождения и уничтожения для случая $\gamma = -1$. Для дальнейшего продвижения в решении данной задачи могут быть использованы численные методы решения дифференциальных уравнений.

Список литературы

[1] Suprit Singh and T. Padmanabhan "Complex Effective Path: A Semi-Classical Probe of Quantum Effects"arXiv:1112.6279v1 [hep-th]

[2] A. M. Переломов "Обобщенные когерентные состояния и их применение издательство "Наука 1987

[3] Киселев В.В. "Квантовая механика Протвино 2005